Direction régionale de l'éducation Tunis 1	Devoir de Contrôle n° : 1 Mathématique	Année scolaire 2016/2017
Lycée : El Montazeh Mourouj 2	Durée : 2H	Classe : 4ème Math
Mr : Gary Badreddine	Date : 15/11/2016	Coefficient : 4

Le sujet comporte 2 pages numérotées de 1/2 à 2/2.

Exercice 1 : (7 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

I. On considère l'équation (E) : $z^2-\left(\sqrt{3}+1\right)(1+i)z+4i=0$ où z est un nombre complexe.

1. a) Vérifier que : $z_0=\sqrt{3}+i$ est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

II. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A=\sqrt{3}+i$ et $z_B=\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}+1)$.

1. a) Montrer que les points O , A et B ne sont pas alignés .

b) Déterminer l'affixe z_G du point G centre du gravité du triangle OAB .

c) Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe z_A.

2. Soit C le point du plan tel que : $OA=OC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

a) Montrer que : $|z_C|=2$ et $arg\,(z_C)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. où z_C est l'affixe du point C.

b) En déduire que $z_C=1+i\sqrt{3}$.

3. a) Montrer que OABC est un losange.

b) Déterminer et construire l'ensemble $E=\left\{M(z)\in P/\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]\right\}$.

Exercice 2 : (9 pts)

I. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-x^2+3x+1$.

1. Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $\alpha\in\left]-\frac{1}{3},0\right[$.

2. Montrer l'équivalence : $f(x)=0$ équivaut à $x=\frac{x^2-1}{x^2+3}$.

II. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ définie sur par ; $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$ et (Γ_g) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Dresser le tableau de variation de g.

2. Montrer que pout tout $x\in[-\frac{1}{3},0]$, $g(x)\in[-\frac{1}{3},0]$.

3. Énoncer le théorème des accroissements finis .

4. Montrer que pout tout $x\in[-\frac{1}{3},0]$, $|g'(x)|\leq\frac{8}{27}$.

5. En déduire que pout tout $x\in[-\frac{1}{3},0]$ $|g(x)-\alpha|\leq\frac{8}{27}|x-\alpha|$.

6. Soit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=g(U_n)\end{cases}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n\in[-\frac{1}{3},0]$.

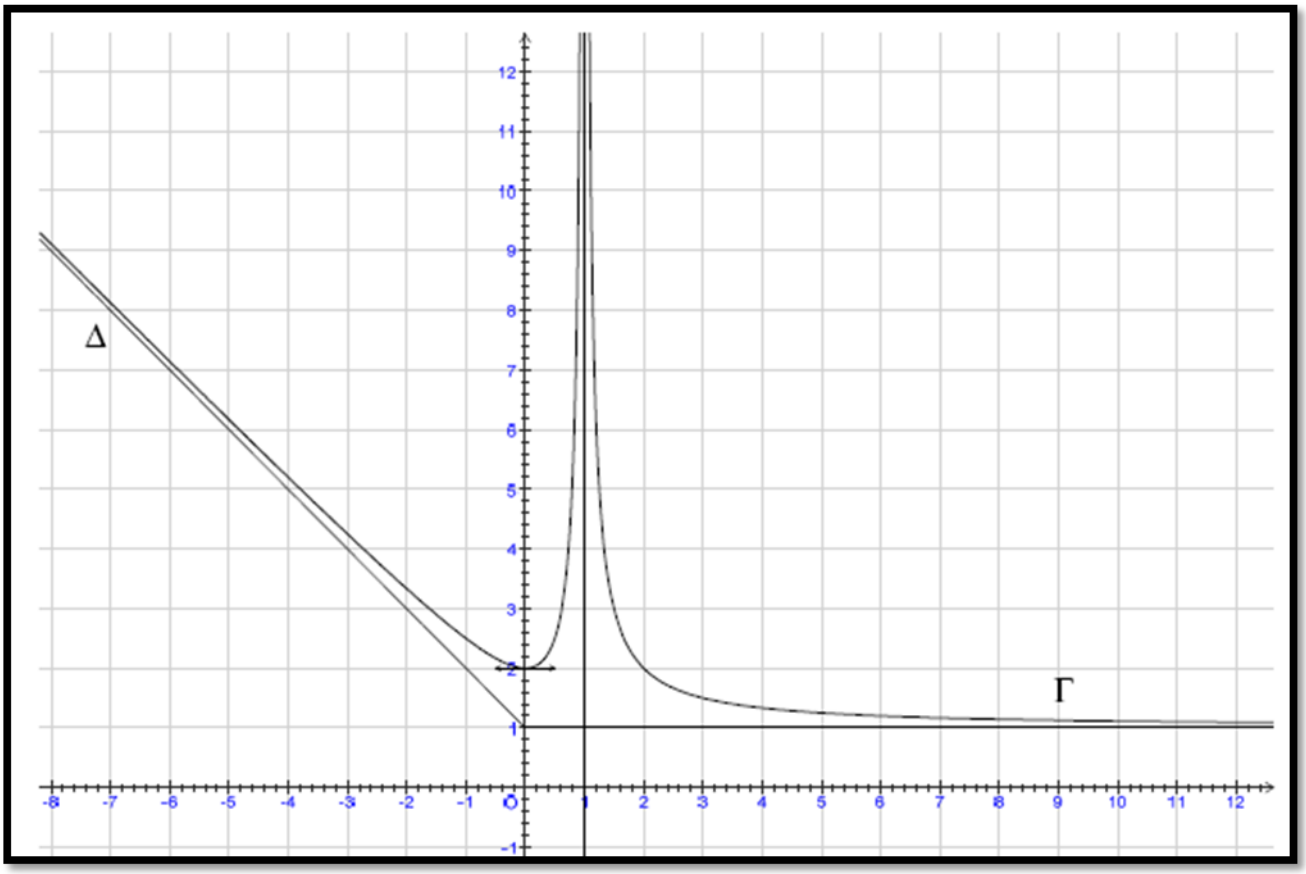
b) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{8}{27}\right)^n$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice 3 : (4 pts)

Dans la figure ci-dessous (Γ) est la courbe représentative d'une fonction *f* définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- On sait que la droite Δ est une asymptote à (Γ) au voisinage de - ∞.
- (Γ) admet deux autres asymptotes les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 1$.



.

1. a) Par une lecture graphique déterminer :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f \circ f(x)$ si $x \neq 1$ et $g(1) = 1$.

a) *Déterminer* $g(2)$, $g(0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty , 1]$ par g.